5. a) Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

b) Beweisen Sie

$$2^n > n^2 \quad \text{für} \quad n \geq 5.$$

6. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{n}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3}$$

ist eine natürliche Zahl.

7. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wird M_n durch $M_n = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1/n\}$ definiert. Dabei bezeichnet $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen. Beweisen Sie durch Widerspruch, dass

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n = \emptyset$$

gilt.

8. Es seien A und B Teilmengen einer Menge X. Dann schreibt man

$$A^c \overset{\text{def}}{=} X \backslash A = \{x \in X : x \notin A\}$$

für das Komplement von A (bezüglich X). Zeigen Sie die *de Morgan'schen Gesetze*

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

9. Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{3}{2} < \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{-n} = \left(1 + \frac{1}{2n-1}\right)^n \leq 2$.